

# Komprimační vzorkování

aneb potřebujeme ještě Shannona a Kotelnikova?

Pavel Rajmic

SPLab ÚTKO FEKT VUT v Brně

24. dubna 2013

# Úvod

- Tzv. řídké (sparse) reprezentace signálů jsou v dnešní době vysoce atraktivním tématem
- Zahrnuje optimalizaci, pravděpodobnost, lineární algebru
- Zasahuje do teorie informace
- Nacházejí se stále nové aplikace
- Asi nejpopulárnější (meta)aplikací je tzv. komprimované snímání (compressed sensing, compressive sampling, CS)

# Osnova

- Model signálu
- Motivační příklad komprimačního vzorkování
- Vzorkování podle Shannona a Kotelnikova
- Řídké signály, jednoznačnost reprezentací
- Algoritmy pro jejich hledání
- Komprimované snímání
- Simulace
- Aplikace

# Aditivní model signálu

Modelujeme signál  $\mathbf{y}$  jako lineární kombinaci základních „stavebních bloků“  $\mathbf{a}_i$ :

$$\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i,$$

kde  $x_i$  jsou váhy neboli souřadnice  $\mathbf{y}$  v systému  $\{\mathbf{a}_i\}$ . Jednotlivým  $\mathbf{a}_i$  říkáme *atomy*, celému systému říkáme *slovník*.

# Aditivní model signálu

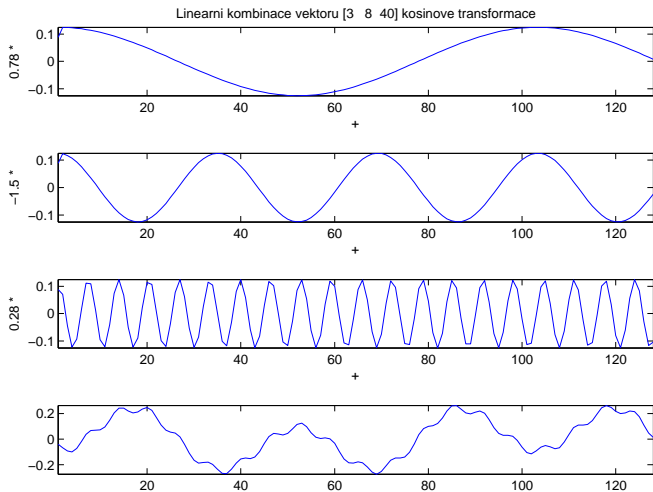
Modelujeme signál  $\mathbf{y}$  jako lineární kombinaci základních „stavebních bloků“  $\mathbf{a}_i$ :

$$\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i,$$

kde  $x_i$  jsou váhy neboli souřadnice  $\mathbf{y}$  v systému  $\{\mathbf{a}_i\}$ . Jednotlivým  $\mathbf{a}_i$  říkáme *atomy*, celému systému říkáme *slovník*.

Budeme pracovat v diskrétním čase

## Aditivní model signálu – příklad



$$\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i$$

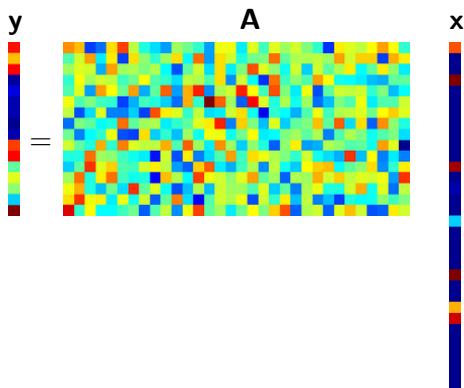
Zde uplatněné  $\{\mathbf{a}_i\}$  jsou tři atomy vybrané z báze DCT

# Aditivní model signálu – maticové vyjádření

Model

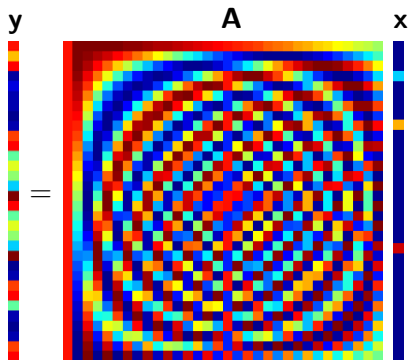
$$\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i$$

můžeme zapsat jako násobení matice obsahující slovník:  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$



## Aditivní model signálu – maticové vyjádření

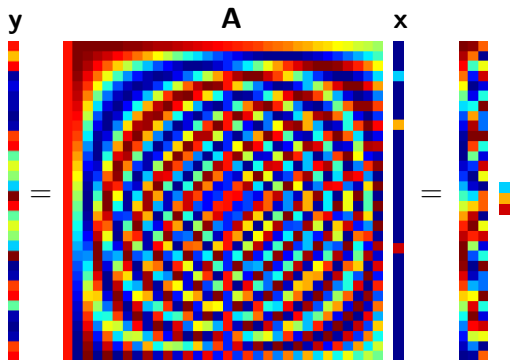
V našem příkladě s bází DCT:  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$





# Aditivní model signálu – maticové vyjádření

V našem příkladě s bází DCT:  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$



# Vzorkování tradičně

- Shannon, Whittaker, Nyquist, Kotelnikov, Raabe, Someya říkají:
- Pokud signál má nejvyšší nenulový kmitočet  $f_{\max}$ , pak vzorkovací kmitočet musí splňovat

$$f_{\text{vz}} > 2f_{\max}$$

aby mohlo dojít k přesné rekonstrukci

- Rekonstrukce klasická, jednoduchá, interpolací mezi vzorky

# Vzorkování tradičně

- Shannon, Whittaker, Nyquist, Kotelnikov, Raabe, Someya říkají:
- Pokud signál má nejvyšší nenulový kmitočet  $f_{\max}$ , pak vzorkovací kmitočet musí splňovat

$$f_{\text{vz}} > 2f_{\max}$$

aby mohlo dojít k přesné rekonstrukci

- Rekonstrukce klasická, jednoduchá, interpolací mezi vzorky
- Tato poučka nebere v potaz jak spektrum vypadá
- Zavedme nějakou apriori informaci

# Vzorkování tradičně

- Shannon, Whittaker, Nyquist, Kotelnikov, Raabe, Someya říkají:
- Pokud signál má nejvyšší nenulový kmitočet  $f_{\max}$ , pak vzorkovací kmitočet musí splňovat

$$f_{\text{vz}} > 2f_{\max}$$

aby mohlo dojít k přesné rekonstrukci

- Rekonstrukce klasická, jednoduchá, interpolací mezi vzorky
- Tato poučka nebere v potaz jak spektrum vypadá
- Zaveďme nějakou apriori informaci
- Pokud spektrum signálu je omezeno na pásmo  $(f_1, f_2)$ , pak pro přesnou rekonstrukci stačí zvolit

$$\frac{2f_1}{n-1} > f_{\text{vz}} > \frac{2f_2}{n},$$

pokud ovšem existuje vhodné celé  $n$

- Rekonstrukce interpolací

# Vzorkování tradičně

- Shannon, Whittaker, Nyquist, Kotelnikov, Raabe, Someya říkají:
- Pokud signál má nejvyšší nenulový kmitočet  $f_{\max}$ , pak vzorkovací kmitočet musí splňovat

$$f_{\text{vz}} > 2f_{\max}$$

aby mohlo dojít k přesné rekonstrukci

- Rekonstrukce klasická, jednoduchá, interpolací mezi vzorky
- Tato poučka nebere v potaz jak spektrum vypadá
- Zavedme nějakou apriori informaci
- Pokud spektrum signálu je omezeno na pásmo  $(f_1, f_2)$ , pak pro přesnou rekonstrukci stačí zvolit

$$\frac{2f_1}{n-1} > f_{\text{vz}} > \frac{2f_2}{n},$$

pokud ovšem existuje vhodné celé  $n$

- Rekonstrukce interpolací
- U *podvzorkování* to funguje stejně

# Motivační příklad – Matlab

- ekvidistantní a náhodné podvzorkování signálu DCT
- a rekonstrukce pomocí  $\ell_1$ -minimalizace
- co všechno jsme vysledovali?

# Vzorkování méně tradičně

- Neekvidistantní odebrání vzorků
- Signály s „Finite rate of innovation“
- Všechny přístupy považují signál za součet dílčích signálů

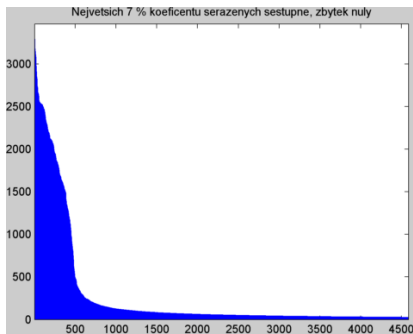
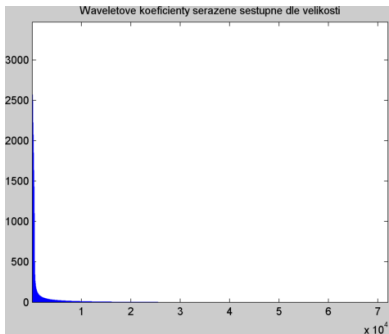
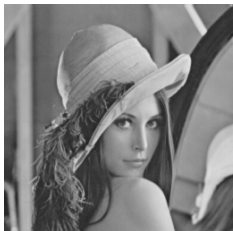
# Formulace úlohy I.

- Vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  je znám (měření, signál)
- Matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ ,  $m < N$ , je plné hodnoti (atomy, slovník)
- Pak máme nekonečně mnoho řešení  $\mathbf{x}$  tohoto systému  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Které si vybrat?

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$



# Motivační příklad – řídkost v bázi vlnkové transformace



# Formální definice řídkosti (sparsity)

- Definujeme  $\ell_0$ -normu vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  jako

$$\|\mathbf{x}\|_0 = |\text{supp}(\mathbf{x})|$$

tj. počet jeho nenulových složek

- Příklad:  $\| [1, 0, -4, 5, 0] \|_0 = 3$ .

# Formální definice řídkosti (sparsity)

- Definujeme  $\ell_0$ -normu vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  jako

$$\|\mathbf{x}\|_0 = |\text{supp}(\mathbf{x})|$$

tj. počet jeho nenulových složek

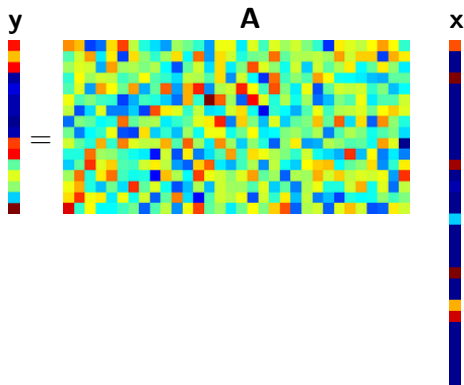
- Příklad:  $\| [1, 0, -4, 5, 0] \|_0 = 3$ .
- $k$ -řídký vektor splňuje

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$$

# Formulace úlohy II.

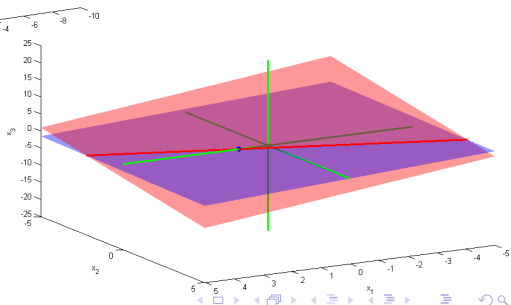
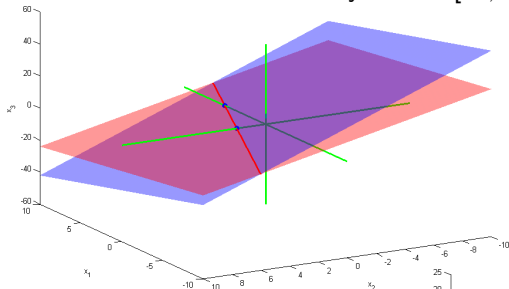
- Jaké řešení  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  si zvolit?
- Chtěli bychom nejřidší možné:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (\text{P0})$$



# Řídká řešení SLR – jednoduché příklady

Dvě rovnice o třech neznámých  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ ; různé situace



# Řídká řešení SLR – povolené odchýlení

- Aproximační úloha s povolenou odchylkou

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \leq \delta, \quad (\text{P0}\delta)$$

- přípustná množina je „tubus“ okolo přesného řešení

# Postačující podmínky pro jednoznačnost řešení

- Číslo  $\text{spark}(\mathbf{A})$  definujeme jako nejmenší počet sloupců matice  $\mathbf{A}$ , které jsou lineárně závislé. Formálně

$$\text{spark}(\mathbf{A}) = \min_{\mathbf{z} \in \ker \mathbf{A}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \|\mathbf{z}\|_0. \quad (1)$$

- $\text{spark}(\mathbf{A})$  může být mezi 2 a  $m + 1$

# Postačující podmínky pro jednoznačnost řešení

- Číslo  $\text{spark}(\mathbf{A})$  definujeme jako nejmenší počet sloupců matice  $\mathbf{A}$ , které jsou lineárně závislé. Formálně

$$\text{spark}(\mathbf{A}) = \min_{\mathbf{z} \in \ker \mathbf{A}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \|\mathbf{z}\|_0. \quad (1)$$

- $\text{spark}(\mathbf{A})$  může být mezi 2 a  $m + 1$
- **Tvrzení:** Pokud má soustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  řešení  $\mathbf{x}$  splňující

$$\|\mathbf{x}\|_0 < \frac{\text{spark}(\mathbf{A})}{2}, \quad (2)$$

pak  $\mathbf{x}$  je nutně (jediné) nejřidší možné řešení.



# Postačující podmínky pro jednoznačnost řešení

- Číslo  $\text{spark}(\mathbf{A})$  definujeme jako nejmenší počet sloupců matice  $\mathbf{A}$ , které jsou lineárně závislé. Formálně

$$\text{spark}(\mathbf{A}) = \min_{\mathbf{z} \in \ker \mathbf{A}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \|\mathbf{z}\|_0. \quad (1)$$

- $\text{spark}(\mathbf{A})$  může být mezi 2 a  $m + 1$
- **Tvrzení:** Pokud má soustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  řešení  $\mathbf{x}$  splňující

$$\|\mathbf{x}\|_0 < \frac{\text{spark}(\mathbf{A})}{2}, \quad (2)$$

pak  $\mathbf{x}$  je nutně (jediné) nejřidší možné řešení.

- Elegantní, ale:
  - jak v praxi  $\text{spark}(\mathbf{A})$  najít?
  - velmi, velmi konzervativní (worst-case analysis přes všechny možnosti)

# Algoritmy pro nalezení řešení

- Základní problém

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (\text{P0})$$

obsahuje  $\|\cdot\|_0$  a je neřešitelný v polynomiálním čase (kombinatorická úloha, NP-těžký)

- Takže jakýkoliv algoritmus, který nachází řešení v polynomiálním čase, nutně musí (obecně) najít pouze aproximaci správného řešení
- Budeme doufat, že bude dostatečně blízko nejřidšímu
- Můžeme použít „hladové“ (greedy) algoritmy (např. Orthogonal Matching Pursuit)
- nebo problém „relaxovat“ na nejbližší konvexní problém

# Normy

- Normu vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  definujeme

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{pro } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_p := \sum_{i=1}^N |x_i|^p \quad \text{pro } 0 < p < 1,$$

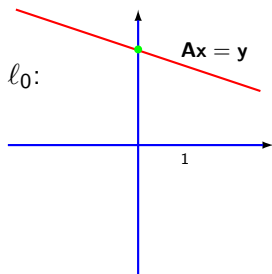
$$\|\mathbf{x}\|_0 := |\text{supp}(\mathbf{x})|$$

- Tedy

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2} \quad (\text{Eukleides}), \quad \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^N |x_i| \quad (\text{Manhattan})$$

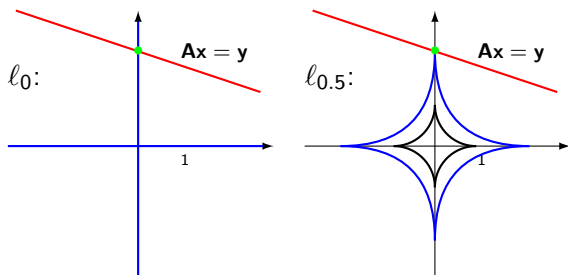
$\ell_p$ -relaxace:  $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_p$  vzhledem k  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$

„Nejbližší“ konvexní optimalizační problém je při použití  $\ell_1$ -normy:



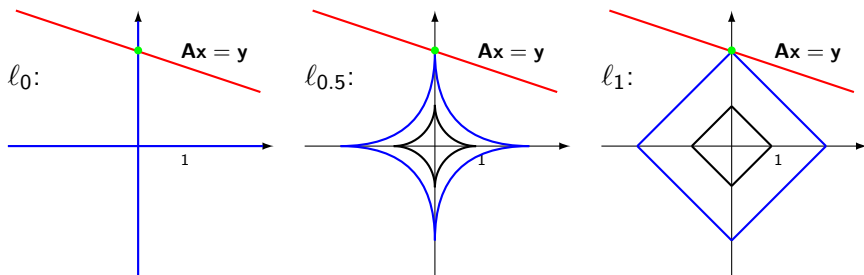
$\ell_p$ -relaxace:  $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_p$  vzhledem k  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$

„Nejbližší“ konvexní optimalizační problém je při použití  $\ell_1$ -normy:



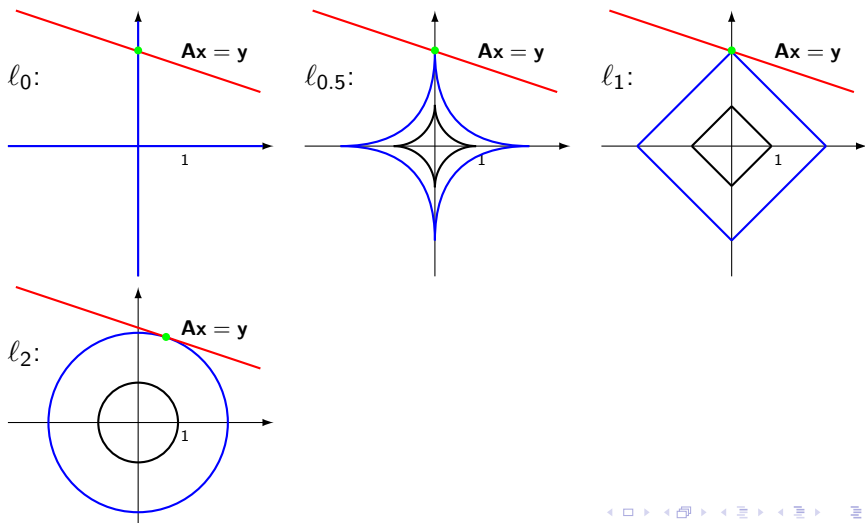
$\ell_p$ -relaxace:  $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_p$  vzhledem k  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$

„Nejbližší“ konvexní optimalizační problém je při použití  $\ell_1$ -normy:



$\ell_p$ -relaxace:  $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_p$  vzhledem k  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$

„Nejbližší“ konvexní optimalizační problém je při použití  $\ell_1$ -normy:



# $\ell_1$ -relaxace

- Tedy relaxovaná úloha zní

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}. \quad (\text{P1})$$

čili

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^N |x_i| \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}. \quad (\text{P1})$$

- to se nazývá Basis Pursuit; různé metody a software pro řešení, počínaje lineárním programováním



$\ell_1$ -relaxace

- Tedy relaxovaná úloha zní

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}. \quad (\text{P1})$$

čili

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^N |x_i| \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}. \quad (\text{P1})$$

- to se nazývá Basis Pursuit; různé metody a software pro řešení, počínaje lineárním programováním
- Za přítomnosti šumu

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|_2 \leq \delta, \quad (\text{P1}\delta)$$

- to se nazývá LASSO; robustní statistika

# Podmínky ekvivalence $\ell_1$ - $\ell_0$

- Kdy jsou řešení (P1) a (P0) shodná?
- Překvapivě „často“: vždy, když jádro  $\ker \mathbf{A}$  není rovnoběžné s (nad)stěnou  $\ell_1$ -mnohostěnu
- Podmínky ekvivalence dává řada kritérií
- Problém je, že většina z nich je výpočetně neúnosná
- Nejčastěji používaná je RIP (Restricted Isometry Property), stabilní i za přítomnosti šumu

## RIP

- Konstanta omezené isometrie  $\delta_k$  matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  je nejmenší číslo takové, že platí

$$(1 - \delta_k) \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{z}\|_2^2} \leq (1 + \delta_k) \quad (3)$$

pro všechny  $k$ -řádké vektory  $\mathbf{z}$ .

- Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  splňuje RIP řádu  $k$  s konstantou  $\delta_k$ , pokud  $\delta_k \in (0, 1)$ .
- Máme zde zeslabení isometrie dvěma směry:
  - požadavek je pouze na submatice z  $\mathbf{A}$ , nikoliv na matici celou
  - odchylka od zachování původní normy ( $\ell_2$ -kružnice deformována; singulární čísla)
- Interpretace: Jakýkoliv normalizovaný  $k$ -řádký vektor po transformaci maticí  $\mathbf{A}$  nezmění příliš svou velikost.

# Podmínky na ekvivalenci obsahující RIP

- Jednoduše se dá dokázat **tvrzení**: Splňuje-li **A** RIP řádu  $2k$  s konstantou  $\delta_{2k} \in (0, 1)$ , pak případné řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  řídkosti nejvýše  $k$  musí být jediné.
  - to ovšem nezaručuje, že to řešení lze najít „rozumnými“ prostředky

# Podmínky na ekvivalenci obsahující RIP

- Jednoduše se dá dokázat **tvrzení**: Splňuje-li  $\mathbf{A}$  RIP řádu  $2k$  s konstantou  $\delta_{2k} \in (0, 1)$ , pak případné řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  řídkosti nejvýše  $k$  musí být jediné.
  - to ovšem nezaručuje, že to řešení lze najít „rozumnými“ prostředky
- **Tvrzení**: Nechť  $\mathbf{A}$  splňuje RIP řádu  $3k$  s konstantou  $\delta_{3k} < \frac{1}{3}$ . Nechť  $\mathbf{x}^*$  je řešením  $\ell_1$ -minimalizace vzhledem k  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ . Pak

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq C \frac{\sigma_k(\mathbf{x})_1}{\sqrt{k}},$$

kde  $C > 0$  je konstanta závisující pouze na  $\delta_{3k}$ .

- pravá strana bude díky  $\sigma_k(\mathbf{x})_1$  nulová pro všechny  $k$ -řídké vektory!

# Podmínky na ekvivalenci obsahující RIP

- Jednoduše se dá dokázat **tvrzení**: Splňuje-li  $\mathbf{A}$  RIP řádu  $2k$  s konstantou  $\delta_{2k} \in (0, 1)$ , pak případné řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  řídkosti nejvýše  $k$  musí být jediné.
  - to ovšem nezaručuje, že to řešení lze najít „rozumnými“ prostředky
- **Tvrzení**: Nechť  $\mathbf{A}$  splňuje RIP řádu  $3k$  s konstantou  $\delta_{3k} < \frac{1}{3}$ . Nechť  $\mathbf{x}^*$  je řešením  $\ell_1$ -minimalizace vzhledem k  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ . Pak

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq C \frac{\sigma_k(\mathbf{x})_1}{\sqrt{k}},$$

kde  $C > 0$  je konstanta závisající pouze na  $\delta_{3k}$ .

- pravá strana bude díky  $\sigma_k(\mathbf{x})_1$  nulová pro všechny  $k$ -řídké vektory!
- **Tvrzení**: Nechť  $\mathbf{A}$  splňuje RIP řádu  $2k$  s konstantou  $\delta_{2k} < 0,4142$ . Pak

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq C \frac{\sigma_k(\mathbf{x})_1}{\sqrt{k}}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_1 \leq C \sigma_k(\mathbf{x})_1$$

# Matice vyhovující RIP

- Jak vlastně vypadají  $m \times N$  matice  $\mathbf{A}$ , které splňují RIP?

# Matice vyhovující RIP

- Jak vlastně vypadají  $m \times N$  matice  $\mathbf{A}$ , které splňují RIP?
- Prozatím víme jen o náhodných



# Částečné zhodnocení

- Teorie nám není příliš nakloněna
- Praxe však ukazuje, že můžeme dosáhnout mnohonásobně lepších výsledků než postačující podmínky zaručují

# Komprimované snímání – formulace úlohy

- Obvyklý způsob komprimace dat – adaptivně vůči signálu
  - nasnímá se vše a pak se jejich „nejméně důležitá část“ vypustí
  - JPEG komprese jako příklad
- CS má jinou strategii – neadaptivní
  - nasnímá se rovnou pouze tolik „vzorků“, kolik je skutečně potřeba
  - jaká je cena za rychlejší akvizici?

# Komprimované snímání – formulace úlohy

- Obvyklý způsob komprimace dat – adaptivně vůči signálu
  - nasnímá se vše a pak se jejich „nejméně důležitá část“ vypustí
  - JPEG komprese jako příklad
- CS má jinou strategii – neadaptivní
  - nasnímá se rovnou pouze tolik „vzorků“, kolik je skutečně potřeba
  - jaká je cena za rychlejší akvizici?
- Vrátime se k původní úloze

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad (\text{P0})$$

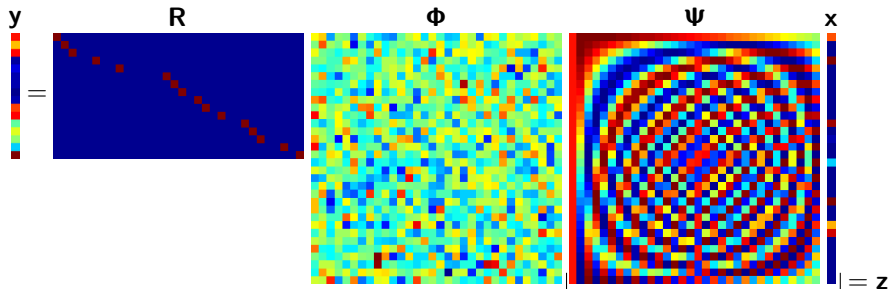
- U CS bude mít  $\mathbf{A}$  speciální konstrukci

## Komprimované snímání – formulace úlohy

- Úloha CS:

$$\tilde{\mathbf{x}} := \arg \min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{R}\Phi}_{\mathbf{P}} \underbrace{\Psi\mathbf{x}}_{\mathbf{z}} \quad (\text{P1U})$$

- $\Psi$  je ortonormální báze pro signál  $\mathbf{z}$ , souřadnice  $\mathbf{x}$  jsou řádké
- $\Phi$  je zatím nespecifikovaná matice  $N \times N$
- $\mathbf{R}$  je matice, která provede náhodný výběr  $m$  řádků z  $\Phi$



# Komprimované snímání – formulace úlohy

- Tzv. měření v CS tedy ( $\mathbf{P} = \mathbf{R}\Phi$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Psi$ ,  $\mathbf{z} = \Psi\mathbf{x}$ ) můžeme zapsat:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

- Řeší se tedy úloha

$$\tilde{\mathbf{x}} := \arg \min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{y} = \mathbf{P}\Psi\mathbf{x} \quad (\text{P1U})$$

- Když je  $\tilde{\mathbf{x}}$ , resp. jeho odhad nalezen, signál je rekonstruován triviálně:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \Psi\tilde{\mathbf{x}}$$

# Kolik měření je třeba učinit?

- Kolik měření je potřeba udělat, abychom mohli garantovat dobrou rekonstrukci pomocí  $\ell_1$ -minimalizace?
- Jinými slovy: kolik řádků  $m$  má mít matice  $\mathbf{P}$ , zvaná *měřící*?

# Vzájemná koherence pro dvě ortobáze

- Máme-li matici složenou ze dvou ortonormálních bází (tedy  $N \times 2N$ ), pak vzájemnou koherenci napíšeme jako

$$\mu([\Phi, \Psi]) = \max_{1 \leq i, j \leq N} |\psi_i^\top \phi_j| \quad (4)$$

- Koherence se v tomto případě pohybuje mezi  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  a 1
- Na koherenci je založeno tvrzení, které určuje dostatečný počet měření (vzorků), aby  $\ell_1$ -minimalizace dala přesné řešení

# Závislost počtu měření na koherenci a řídkosti

- **Tvrzení:** Necht' je dán signál  $\mathbf{z}$ , který má v  $\Psi$   $k$ -řádkou reprezentaci  $\mathbf{x}$ . Pak řešení  $\ell_1$ -minimalizace

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{y} = \mathbf{R}\Phi\Psi\mathbf{x}, \quad (5)$$

kde  $\mathbf{y}$  jsou měření, je současně s vysokou pravděpodobností nejřidší možné, pokud je pro  $\mathbf{R}$  zvoleno

$$m \geq C \cdot \mu^2([\Phi, \Psi]) \cdot k \cdot N \cdot \ln N, \quad (6)$$

pro nějakou kladnou konstantu  $C$ .



# Závislost počtu měření na koherenci a řídkosti

- **Tvrzení:** Necht' je dán signál  $\mathbf{z}$ , který má v  $\Psi$   $k$ -řádkou reprezentaci  $\mathbf{x}$ . Pak řešení  $\ell_1$ -minimalizace

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{y} = \mathbf{R}\Phi\Psi\mathbf{x}, \quad (5)$$

kde  $\mathbf{y}$  jsou měření, je současně s vysokou pravděpodobností nejřidší možné, pokud je pro  $\mathbf{R}$  zvoleno

$$m \geq C \cdot \mu^2([\Phi, \Psi]) \cdot k \cdot N \cdot \ln N, \quad (6)$$

pro nějakou kladnou konstantu  $C$ .

- Počet měření  $m$  závisí na řídkosti  $k$  pouze lineárně
- Dvojice ortobází s koherencí  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  potřebují pouze řádově  $k \cdot \ln N$  měření
- Naopak, jak koherence roste, přestává to být atraktivní a mívá to k nesmyslnosti

# Výběr matice $\Phi$

- Báze  $\Psi$  je fixní, jak vybrat matici  $\Phi$ ?

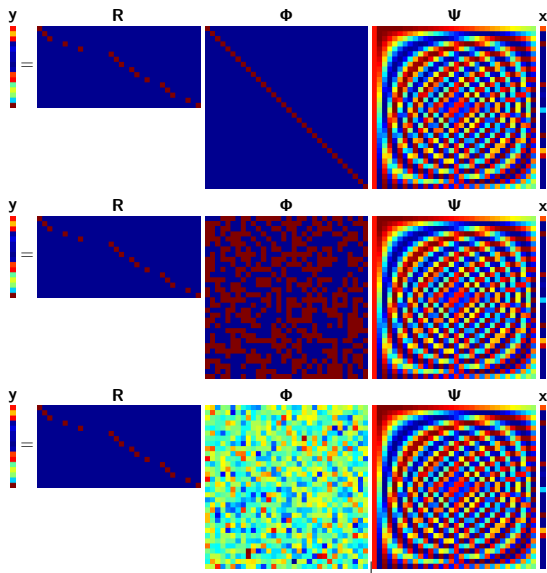
# Výběr matice $\Phi$

- Báze  $\Psi$  je fixní, jak vybrat matici  $\Phi$ ?
- Převažují náhodné konstrukce (pokud to dovoluje podstata problému)
- Ty jsou málo koherentní s téměř jakýmkoliv deterministickým slovníkem
- Hlavně gaussovské a bernoulliiovské matice, protože mají výhodné vlastnosti

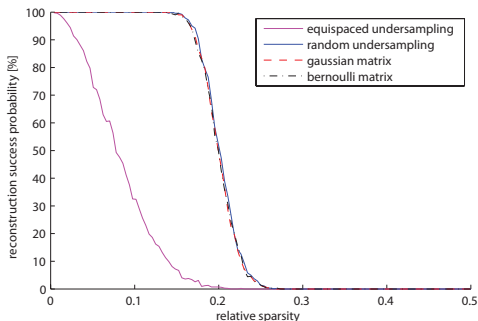
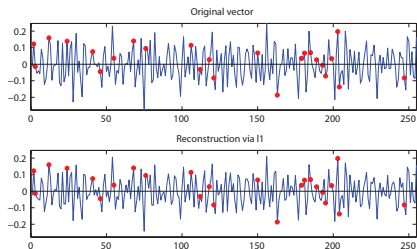
# Simulace – 1D signál řídký v DCT

- uměle vytvořený signál délky  $N = 256$ , řídkost v DCT  $k = 1, \dots, 128$ , velikost koeficientů náhodná
- počet měření  $m = 1, \dots, 128$ , pomocí různých  $\Phi$  a  $\mathbf{R}$
- pro každou kombinaci 1000 měření a pokusů o rekonstrukci, pomocí  $\ell_1$ -minimalizace
- za úspěšnou byla rekonstrukce považována při  $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2 \leq 0,05 \cdot \|\mathbf{x}\|_2$

# Simulace – signál řídký v DCT: různé scénáře snímání



# Simulace – 1D signál řídký v DCT

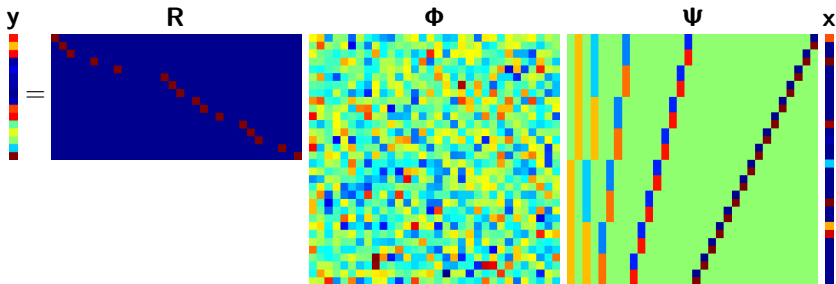


Vlevo: Signál je vytvořen z  $k = 8$  nenulových DCT koeficientů. Ukázka jedné realizace náhodného podvzorkování signálu, snímáno  $m = 25$  vzorků. Poté výsledek rekonstrukce.

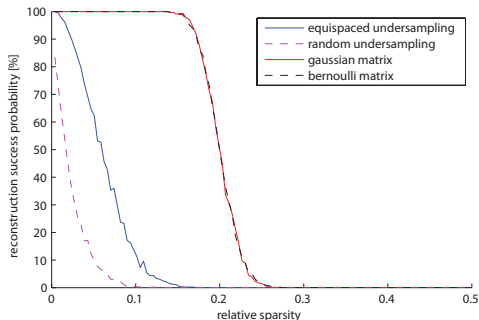
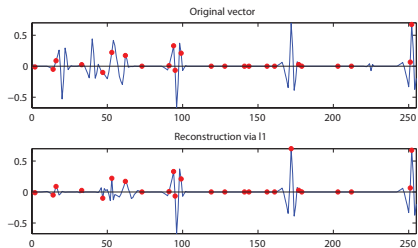
Vpravo: Vliv použitého druhu měřicí matice  $\Phi$  na úspěšnost rekonstrukce signálu (průměry).

# Simulace – 1D signál řídký v bázi waveletů

- podobně vytvořen signál v bázi ortogonálních waveletů Daubechies s kompaktním nosičem
- průběh experimentu totožný
- ilustračně s gaussovským měřením a Haarovým waveletem:



# Simulace – 1D signál řídký v bázi waveletů

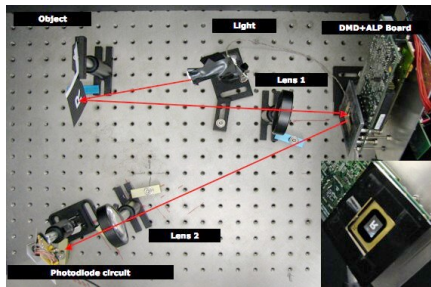
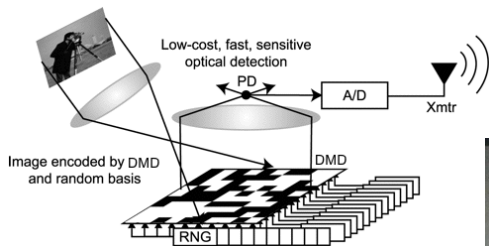


Vlevo: Signál je vytvořen z  $k = 8$  nenulových koeficientů ortonormální báze Daubechies 3. Ukázka jedné realizace náhodného podvzorkování signálu, počet vzorků  $m = 25$ .

Vpravo: Vliv použité měřicí matice  $\Phi$  na úspěšnost rekonstrukce signálu (průměry).



# Single pixel camera – design



Funkční vzorek „jednopixelového fotoaparátu“ (2006): Objekt je přes čočku zobrazen na pole mikrozrcátek, odraz je poté další čočkou soustředěn na jednoduchý snímač, ze kterého se odebere hodnota jasu. Zrcátka během „focení“ *m*krát náhodně změni konfiguraci.

# Single pixel camera – výsledky



65536 Pixels  
1300 Measurements  
(2%)



65536 Pixels  
3300 Measurements  
(5%)

<http://dsp.rice.edu/cscamera>

# CS v magnetické rezonanci

- je jednou ze slibných aplikačních oblastí
- CS pomáhá zrychlit měření
- (na úkor doby rekonstrukce signálu)

# Magnetická rezonance – základy

- silná magnetická pole
- návrat do rovnovážného stavu je zachycen cívkou
- signál se snímá *přímo v kmitočtové oblasti* (k-space), tedy  $\Phi = \mathbf{F}$  je fixní Fourierova matice
- jedno „měření“ je tedy získání jednoho Fourierova koeficientu
- MRI: po jaké dráze se pohybujeme v k-prostoru určují gradientní pole proměnná v čase
- rekonstrukce je obvykle prováděna lineárními  $\ell_2$ -technikami (backprojection)
- při ekvidistantním vzorkování:
  - rozlišení obrazu je dáno Nyquistovým kmitočtem
  - pokud některé vzorky chybějí, projeví se to aliasingem, rozmazáním ...

# Magnetická rezonance – omezení CS

Výše uvedené by nás vedlo k myšlence:

- *Proč tedy neměřit náhodné vzorky v  $k$ -prostoru?* (použitím matice  $\mathbf{R}$ )

# Magnetická rezonance – omezení CS

Výše uvedené by nás vedlo k myšlence:

- *Proč tedy neměřit náhodné vzorky v  $k$ -prostoru?* (použitím matice  $\mathbf{R}$ )

Omezení praktických měření:

- trajektorie v  $k$ -prostoru není libovolná (fyzikální a fyziologické hranice)
- měřicí matice  $\Phi = \mathbf{F}$  je fixní; tedy zvláště silný tlak na konstrukci „ředících“ bází  $\Psi$

# MRI – simulace

- Ověření CS ve zjednodušeném MRI scénáři
- MR obrázek musí být dost řídký v nějaké bázi!
  - tento  $128 \times 128$  obrázek je řídký v bázi Haarových vlnek
  - vlevo: originál, vpravo: první diference



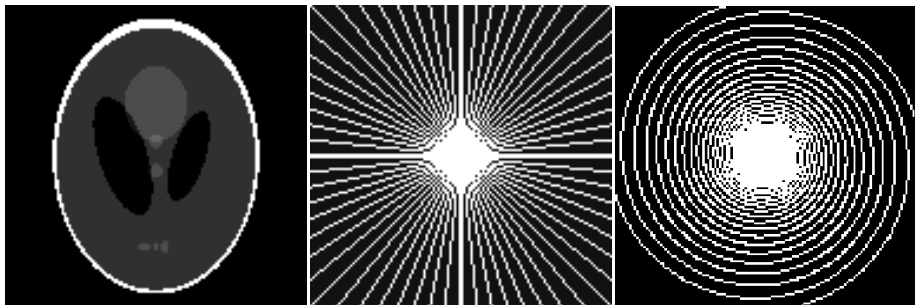
(8 344 nul)



(15 924 nul)

# MRI – simulace

Shepp-Loganův fantom  $128 \times 128$  px (tj. 16 384 pixelů) byl převeden do kmitočtové oblasti a měření byla simulována tak, že byly odebrány pouze Fourierovy koeficienty odpovídající masce (radiální či spirální). Počet měření byl cca 4 000.

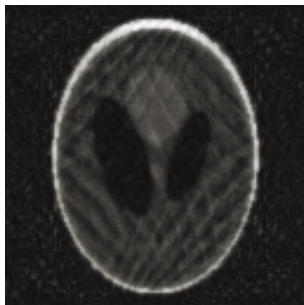


Lineární a nelineární (CS, OMP algoritmus) rekonstrukce jsou porovnány na dalším snímku



# Simulace – magnetická rezonance

## Srovnání rekonstrukce



lineární, z radiálních čar

PSNR 19,7 dB



CS-OMP, z radiálních čar

PSNR 294,7 dB



CS-OMP, ze spirál

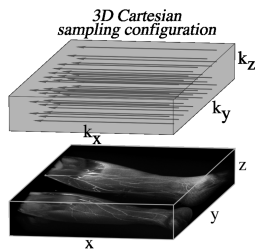
PSNR 291,9 dB

# Aplikace CS v MRI

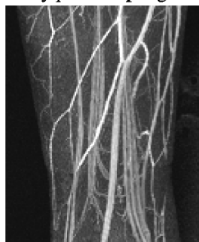
(zpracováno podle článku Lustig et. al., 2008)

- rychlá 3D-angiografie
- MRI mozku
- dynamické snímání srdce

# Aplikace CS v MRI: Rychlá 3D-angiografie



nyquist sampling



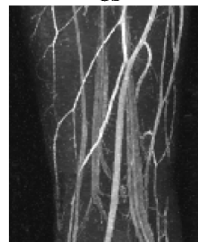
low-resolution



linear



CS

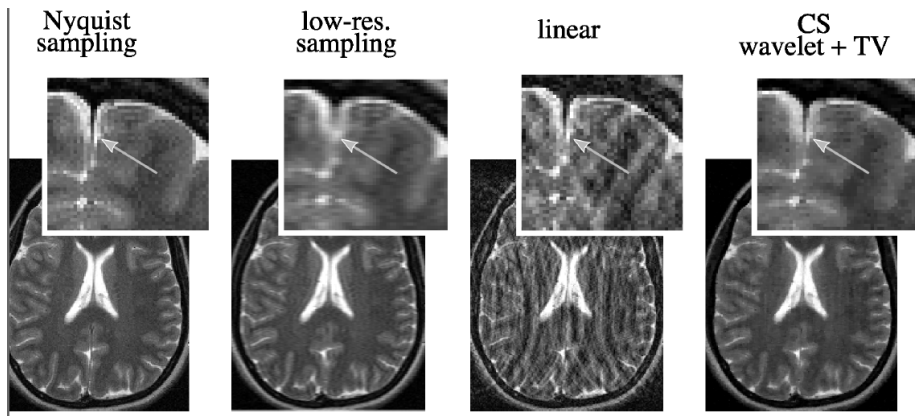


- 10násobné podvzorkování! (zde ve 3D už lze dělat náhodné úsečky)

# Aplikace CS v MRI: Zobrazování mozku

- Obdobně jako u 3D-angiografie
- ale signál je řídký ve složitější bázi (wavelety), a je méně řídký

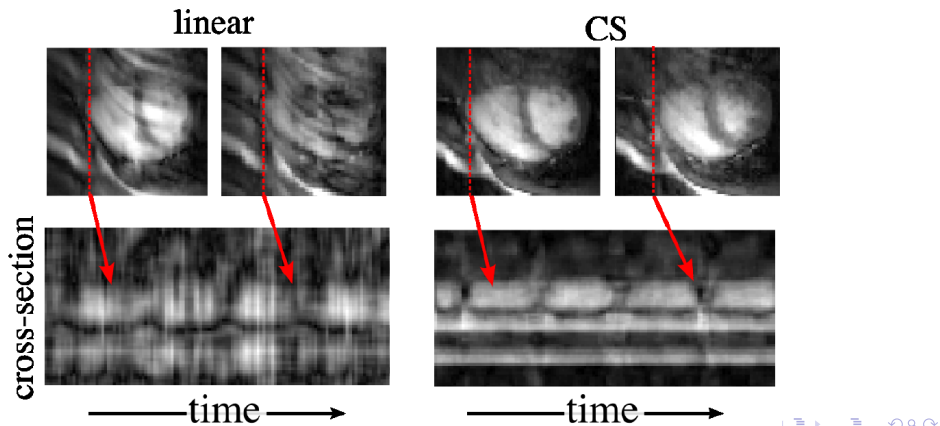
Druhý, třetí, čtvrtý obrázek pořizeny ze stejného množství vzorků:



# Aplikace CS v MRI: Dynamické snímání srdce

- k-t prostor
- signál je ve 2D řídce v bázi waveletů a v čase v harmonické bázi

Srovnání pro 7násobné podvzorkování (CS umožnilo 25 fps místo 3,6 fps):



# Co dál?

- Spojitý čas: převodníky A/I (Analog-to-Information, Xampling)
- Strukturovaná řídkost – ještě více apriori znalosti
- Low-rank data completion (doplňování chybějících informací, Netflix)
- Spousta aplikací

# Závěr

- Jiný způsob „vzorkování“ (měření, snímání, measurements, sensing)
- Měření lineární, rekonstrukce nelineární
- Vzorkovací „kmitočet“ je určen koherencí snímací a reprezentační báze a řídkostí signálu
- Tedy za podmínky řídkosti vzorkovací teorém nepotřebujeme; maximální kmitočet je mimo hru
- Řídká rekonstrukce není omezena na harmonické signály
- Rekonstrukce náročná na čas i paměť, pouze pravděpodobné výsledky
- Podmínky existují vesměs postačující (worst-case), praxe funguje dobře

# Doporučená literatura pro orientaci v problematice

## Česky

- Hrbáček, Rajmic, Veselý, Špiřík: Řídké reprezentace signálů: úvod do problematiky, *Elektrorevue*, 2011
- Hrbáček, Rajmic, Veselý, Špiřík: Řídké reprezentace signálů: komprimované snímání, *Elektrorevue*, 2011

## Anglicky

- Bruckstein, Donoho, Elad: From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images, *SIAM Review*, 2009
- Candés, Wakin: An Introduction to Compressive Sampling, *IEEE Signal Processing Magazine*, March 2008
- Lustig, Donoho, Santos, Pauly: Compressed Sensing MRI, *IEEE Signal Processing Magazine*, March 2008.



# Závěrem

- Díky Radkovi Hrbáčkovi za provedení simulací a za vytvoření obrázků
- Email `rajmic[at]feec.vutbr.cz`
- Web `http://www.utko.feec.vutbr.cz/~rajmic`
- SPLab web `http://splab.cz`

# Závěrem

- Díky Radkovi Hrbáčkovi za provedení simulací a za vytvoření obrázků
- Email `rajmic[at]feec.vutbr.cz`
- Web `http://www.utko.feec.vutbr.cz/~rajmic`
- SPLab web `http://splab.cz`

Děkuji vám za pozornost.