Rozebrání příborů v hostinci

Kolem stolu sedí N lidí a chystají se jíst. Číšník přinese nádobu, kde je N nožů a N vidliček. Bohužel není poznat, co je co, protože madla vidliček i nožů, která jsou otočena nahoru, vypadají všechna stejně – člověk musí objekt vytáhnout, aby zjistil, jestli je to nůž nebo vidlička. Uvažujeme, že nádoba postupuje od prvního člověka k poslednímu a že jeden se druhému nedívá pod prsty.

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti počtu vytažení, než mají všichni jedlíci v ruce nůž i vidličku? (Jednoduše: jak dlouho to trvá, než můžou všichni začít jíst?)

Řešení:

Při popsaném postupu výběru je jasné, že situace jednotlivých lidí jsou stochasticky nezávislé. Každý člověk vybere nejprve nůž nebo vidličku (bez újmy na obecnosti nadále předpokládejme, že nůž) a k němu do páru hledá vidličku. Tudíž každý člověk udělá $1 + X$ pokusů, kde X je náhodná veličina popisující počet pokusů, kterými člověk najde v nádobě vidličku.

Označme $p(n, k)$ pravděpodobnost, že pro člověka, ke kterému přišla nádoba s n příbory, platí $X = k$. Platí

$$p(n, 1) = \frac{n}{2n-1} \tag{1}$$

$$p(n, 2) = \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n-2} \tag{2}$$

$$p(n, 3) = \left(\frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n-2}{2n-2}\right) \cdot \frac{n}{2n-3}, \tag{3}$$

$$\vdots$$

obecně

$$p(n, k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{2n-i}\right) \cdot \frac{n}{2n-k} \tag{4}$$

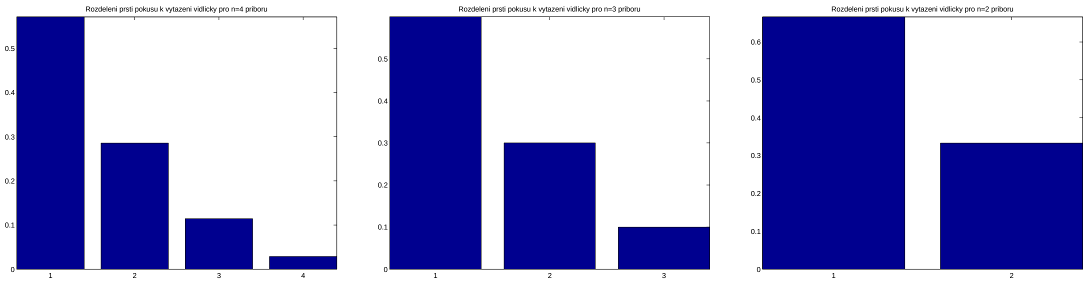
pro $k \in \{1, \ldots, n\}$. (Při $k = n$ je člověk opravdu smolař, neboť najde vidličku až na poslední možný pokus...)

Příklad: U stolu sedí $N = 4$ lidé. K prvnímu člověku přijde nádoba se čtyřmi příbory a máme

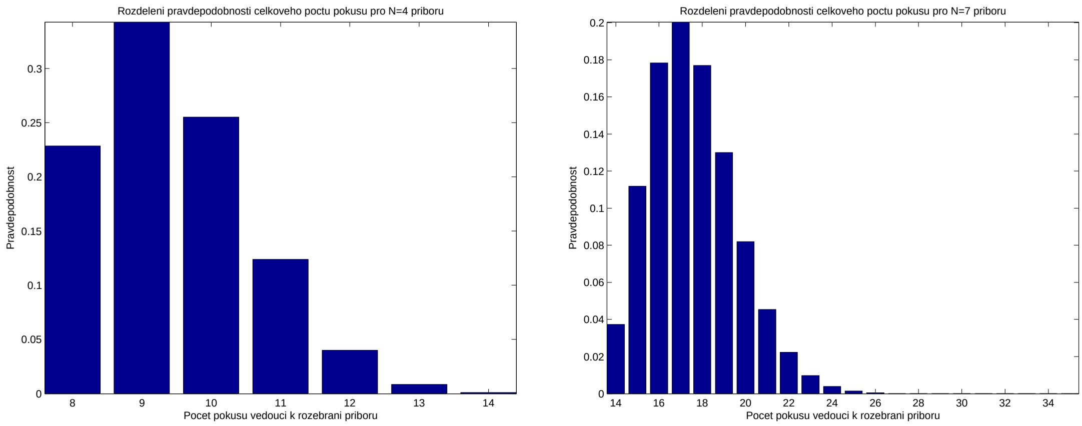
$$p(4, 1) = \frac{4}{7}, \quad p(4, 2) = \frac{2}{7}, \quad p(4, 3) = \frac{12}{105}, \quad p(4, 4) = \frac{3}{105},$$

v součtu samozřejmě dávají jedničku. Pro dalšího člověka platí

$$p(3, 1) = \frac{3}{5}, \quad p(3, 2) = \frac{3}{10}, \quad p(3, 3) = \frac{1}{10}.$$



Obrázek 1: Grafy posloupností $\{p(n,k)\}_{k=1}^{n}$ pro $n = 4, 3, 2$.



Obrázek 2: „Celkové“ pravděpodobnostní funkce pro $N = 4$ a $N = 7$.

Pro dalšího máme

$$p(2,1) = \frac{2}{3}, \quad p(2,2) = \frac{1}{3}$$

a poslední člověk dostane nádobu s jedním nožem a jednou vidličkou, takže potřebuje pouze dva pokusy:

$$p(1,1) = 1.$$

První tři případy jsou v grafech na obr. 1.

Obecně, posloupnosti $\{p(n,k)\}_{k=1}^{n}$ jsou evidentně klesající.

Celkový počet pokusů za celou společnost je dán součtem za jednotlivé osoby. Hledáme tedy rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny

$$Y_N = (1 + X_N) + (1 + X_{N-1}) + \ldots + (1 + X_2) + (1 + X_1), \tag{5}$$

kde pro X_i platí pravděpodobnost $P(X_i = k) = p(i,k)$ neboli máme

$$Y_N = N \cdot 1 + X_N + X_{N-1} + \ldots + X_2 + X_1$$

čili

$$Y_N = N + 1 + \sum_{i=2}^{N} X_i.$$

Jednotlivá X_i jsou stochasticky nezávislá, takže rozdělení veličiny $\sum_{i=2}^{N} X_i$ je konvolucí jednotlivých rozdělení veličin X_i. Výsledné Y_N může nabývat hodnot od $2N$ (minimální počet pokusů) až po $N+1+[N+(N-1)+(N-2)+\ldots+2] = N+1+(2+N)\frac{N-1}{2} = \frac{N^2+3N}{2}$ (maximální počet pokusů). Na obr. 2 jsou vidět výsledná rozdělení pravděpodobnosti pro $N = 4$ a pro $N = 7$.

Software pro Matlab je možné nalézt na stránce `.../~rajmic/koutek/pribory-software`.

Další otázky Otázky, které zde nejsou řešeny:

- Lze určit maximum onoho rozdělení?
- Jak by to vypadalo, kdyby kromě nože a vidličky se vybírala ještě lžíce?